

信賴区間について

2010年1月5日

梅原 大祐

信頼区間の定義

母数 θ は観測できない

- 信頼区間 (confidence interval)
 - U, V : ある母数 θ を含んだ確率分布に従う統計量
 - 区間 $[U, V]$ が θ に対する $100 \times p$ % 信頼区間

$$\Pr(U < \theta < V) = p$$

- 値 p を信頼水準または信頼係数と呼ぶ
- 値 p として, 95% あるいは 99% の値が用いられる
- 信頼区間の解釈
 - 「信頼水準 p で, θ は U から V の間にある」

信頼区間の求め方(正規分布)

- **正規分布**に従う独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$
 - μ : 平均, σ^2 : 分散, $\bar{X}$: 標本平均, U^2 : 不偏分散

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

分母は $n-1$ であることに注意。
分散 σ^2 に近い値を与える。

- 確率変数 T
 - 自由度 $\nu = n-1$ の t 分布 $f(t)$ に従う

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U / \sqrt{n}}, f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} (1 + t^2 / \nu)^{-(\nu+1)/2}$$

平均 μ , 分散 σ^2 に依らない

- $100 \times p$ % 信頼区間

- c : t 分布の $100 \times (1+p)/2$ % 点
- **信頼水準** $100 \times p$ % で平均 μ は α から β の間である

Γ はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, (\operatorname{Re}[z] > 0)$$

$$\Pr(\alpha = \bar{X} - cU / \sqrt{n} < \mu < \beta = \bar{X} + cU / \sqrt{n}) = p$$

不偏分散

- 独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$
 - 平均 μ , 分散 σ^2 , 母分散 V^2 , 標本分散 S^2 , 不偏分散 U^2

$$V^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

平均 μ は分からない

$$\text{標本平均 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

期待値が分散 σ^2 より低い

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

期待値が分散 σ^2 になる

- 不偏分散 U^2 の期待値

$$\begin{aligned} E[U^2] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (E[X_i^2] - 2E[\bar{X}X_i] + E[\bar{X}^2]) = \frac{n}{n-1} ((\sigma^2 + \mu^2) - E[\bar{X}^2]) \\ &= \frac{n}{n-1} (\sigma^2 - E[(\bar{X} - \mu)^2]) = \frac{n}{n-1} \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

ガンマ関数

- ガンマ関数 Γ の定義

- 自然数の階乗の一般化, 定義域を複素数に拡大

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad (\operatorname{Re}[z] > 0)$$

- ガンマ関数 Γ の再帰的な関係

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} (-e^{-x})' dx = \left[-x^{z-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} + (z-1) \int_0^{\infty} x^{z-2} (-e^{-x})' dx = (z-1) \Gamma(z-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 1$$

- 自然数 ν に対するガンマ関数 $\Gamma(\nu/2)$

$$\Gamma(\nu/2) = \begin{cases} (m-1) \cdots 2 \cdot 1 = (m-1)!, & (\nu = 2m) \\ (m-1/2) \cdots 3/2 \cdot \sqrt{\pi}, & (\nu = 2m+1) \end{cases}$$

t 分布表

- 自由度 ν の $100 \times p$ %信頼区間 ($p = 0.95, 0.99$)

自由度 ν	確率95%	確率99%
1	12.706	63.657
2	4.303	9.925
3	3.182	5.841
4	2.776	4.604
5	2.571	4.032
6	2.447	3.707
7	2.365	3.499
8	2.306	3.355
9	2.262	3.250
10	2.226	3.169